EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 2

1)

a) $f(A)=A' \Leftrightarrow a'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}a \Leftrightarrow a'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 2i \Leftrightarrow a'=-\sqrt{3}+i$

$f(B)=B' \Leftrightarrow b'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}b \Leftrightarrow b'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$f(C)=C' \Leftrightarrow c'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow c'=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

b) $z_I=\dfrac{a'+b}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i+\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow z_I=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$z_J=\dfrac{b'+c}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z_K=\dfrac{c'+a}{2} \Leftrightarrow z_K=-\dfrac{1}{4}+i\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

2) $Z_{\overrightarrow{IJ}}=z_J-z_I \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{IJ}}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{IJ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$Z_{\overrightarrow{IK}}=z_K-z_I \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{IK}}=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$; $Z_{\overrightarrow{KJ}}=z_J-z_K \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{KJ}}=\dfrac{3}{4}+i\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

3) $Z_{\overrightarrow{IJ}}\times\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4}+i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=Z_{\overrightarrow{IK}}$

On a donc $Z_{\overrightarrow{IK}}=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times Z_{\overrightarrow{IJ}}$

D'une part $\left|Z_{\overrightarrow{IK}}\right|=\left|\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|\times\left|Z_{\overrightarrow{IJ}}\right| \Leftrightarrow IK=IJ$ car $\left|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

d'autre part $\arg\left(Z_{\overrightarrow{IK}}\right)=\arg\left[\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times Z_{\overrightarrow{IJ}}\right]=\arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arg\left(Z_{\overrightarrow{IJ}}\right)\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \arg\left(Z_{\overrightarrow{IK}}\right)-\arg\left(Z_{\overrightarrow{IJ}}\right)=\arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\ (2\pi)$ or $\arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$